$4\left(x^2-2x+4\right)-\left(x^2+4\right)^2$

$=4x^2-8x+16-\left(x^4+8x^2+16\right)$

$=4x^2-8x+16-x^4-8x^2-16$

$=-x^4-4x^2-8x\le 0, x>0$

D'où : $\dfrac{x^2-2x+4}{\left(x^2+4\right)^2}-\dfrac{1}{4}\le 0$

Par suite : $\dfrac{x^2-2x+4}{\left(x^2+4\right)^2}\le\dfrac{1}{4}, x\in[0,1]$

b) $x\in[0,1]: \dfrac{x^2-2x+4}{\left(x^2+4\right)^2}\le\dfrac{1}{4}$

D'où on a : $0\le\dfrac{x^2-2x+4}{\left(x^2+4\right)^2}\le\dfrac{1}{4}$ et $1\le e^x\le e, x\in[0,1]$

Donc : $0\le\dfrac{e^x\left(x^2-2x+4\right)}{\left(x^2+4\right)^2}\le\dfrac{e}{4}\le\dfrac{3}{4}$ car $e\le 3$.

Par suite $\forall x\in[0,1]$, $0\le f'(x)\le\dfrac{3}{4}$

3) $x\in[0,1]: g(x)=f(x)-x$

a) $g'(x)=f'(x)-1\le\dfrac{3}{4}-1\le 0$

g est décroissante sur $[0,1]$

T.V :

x	0	α	1
$g'(x)$			
$g(x)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{e-5}{5}$

$g(0)=f(0)-0=\dfrac{1}{4}$

$g(1)=f(1)-1=\dfrac{e}{5}-1=\dfrac{e-5}{1}$

b) $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0 \Leftrightarrow g(x)=0$

Or la fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$

Donc g est une bijection de $[0,1]$ sur $\left[\dfrac{e-5}{5},\dfrac{1}{4}\right]$.

et comme $\dfrac{e-5}{5}<0$ on a $0\in\left[\dfrac{e-5}{5},\dfrac{1}{4}\right]$.

Donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[0,1]$.

Conclusion :

L'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha\in[0,1]$.

*/ le signe de $f(x)-x$ est celui de $g(x)$ sur $[0,1]$.

Etude de signe :

D'où : $\begin{cases} x\in[0,\alpha]: f(x)\ge x \\ x\in[\alpha,1]: f(x)\le x \end{cases}$

4)

$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n), n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a) par récurrence :

i) pour $n=0$ on a : $\alpha\le U_0=1\le 1$ car $\alpha\in[0,1]$

Donc vrai pour $n=0$

ii) supposons que $0\le U_n\le 1$

et montrons que $0\le U_{n+1}\le 1$

En effet $\alpha\le U_n\le 1$

et comme U_n est croissante sur $[0,1]\subset\mathbb{R}$ donc

$f(\alpha)\le f(U_n)\le f(1)$

Avec $f(\alpha)=\alpha$, $f(U_n)=U_{n+1}$ et $f(1)=\dfrac{e}{5}\le 1$

Donc on aura : $\alpha\le U_{n+1}\le 1$

Conclusion :

$\forall n\in\mathbb{N}: \alpha\le U_n\le 1$

b) on sait que pour $x\in[\alpha,1]$ $f(x)\le x$ d'après 3)b)

et comme $U_n\in[\alpha,1]$ on aura $f(U_n)\le U_n$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn